数理解析研究所講究録 1270 巻 2002 年 182-194

組合せ調和写像と超剛性

東北大学理学研究科　井関裕靖 (Hiroyasu Izeki)
Mathematical Institute, Tohoku University
名古屋大学多元数理科学研究科　納谷 信 (Shin Nayatani)
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

1　序論

本研究の目的は, 単体複体からある意味で非正曲率をもつ距離空間への写像で, ある種のエネルギーを最小にするものの存在を確立し, それを離散群の剛性, とくに超剛性の研究に応用することである.

調和写像の剛性問題への応用は, 少なくとも Siu [11] まで遡ることができるが, 超剛性への応用は Corlette [1] に始まる. 彼は, 調和写像を用いて $Sp(n,1)$ $(n \geq 2)$, F_4^{-20} の格子が超剛性をもつことを証明した. Gromov-Schoen [3] は, ユークリッド的ビルディングへのエネルギー最小写像の存在とリプシッツ正則性を確立し, これを用いて Corlette の結果を, 格子の表現の行き先が局所体[1] 上の代数群である場合へと拡張した. これらの仕事に引き続き, Mok-Siu-Yeung [10], Jost-Yau [6] は, 階数 2 以上の半単純リー群の格子に対するマルグリス超剛性の調和写像を用いた別証明を与えた (ただし, 格子としてはココンパクトなものを扱っている). 以上の研究においては, 証明に用いる調和写像は非コンパクト型対称空間というリーマン多様体からの写像であった.

一方, 我々がやりたいのは, 例えば局所体上の代数群の格子に対するマルグリス超剛性を, 同様の手法によって証明することである. この場合には, ユークリッド的ビルディングという単体複体からの調和写像 (とよぶべきもの) を考える必要がある.

ここで, マルグリス超剛性の具体例をみておこう.

例　p, r を素数あるいは ∞, n, N を自然数 (n は 3 以上) とし,

$$G = PGL(n, \mathbf{Q}_p), \quad H = PGL(N, \mathbf{Q}_r)$$

[1]本稿では, 非アルキメデス的な局所体を単に局所体とよぶことにする.

とおく．ここで

$$\mathbf{Q}_p = \begin{cases} \mathbf{R} & (p=\infty \text{ のとき}) \\ p\text{ 進体} & (p \text{ が素数のとき}) \end{cases}$$

である．Γ を G の格子[2]とし，$\rho:\Gamma\to H$ を表現で，像 $\rho(\Gamma)$ が H においてザリスキ稠密なものとする．このとき次のいずれかが成立する:

(i) $p=r$ で，ρ は G から H の上への連続な準同型に拡張する．

(ii) $p\neq r$ で，$\rho(\Gamma)$ は H において (ハウスドルフ位相に関して) 相対コンパクトである．

この例をもとにして，超剛性の証明の筋書きについて少し述べておこう．K を G の極大コンパクト群[3] とし，$X=G/K$ とおく．X は，$p=\infty$ のとき非コンパクト型対称空間であり，p が素数のときはユークリッド的ビルディングとよばれる単体複体となる (第5節を参照せよ)．同様に L を H の極大コンパクト群とし，$Y=H/L$ とおく．このとき ρ-同変写像 $f:X\to Y$ が存在するが，もし f が定値写像にとれるなら，$\rho(\Gamma)$ は f の像である Y の点を固定することになる．これは $\rho(\Gamma)$ が L に共役な部分群 (やはり L の極大コンパクト部分群) に含まれることを意味し，上述の例の (ii) が成立する状況になる．一方，例の (i) の状況は，$p=\infty$ のとき，f が全測地的写像にとれる場合に対応し，p が素数のときにも類似のことがいえると期待される．

ρ-同変写像として調和写像 (エネルギー最小写像) をとることができれば，この写像が定値写像 (エネルギー零の写像) あるいは「全測地的」写像を与えることが期待できる．実際，最初に触れたリーマン多様体からの調和写像を用いた超剛性の証明は，このようなアイデアに基づいてなされている．

本稿では，まず，単体複体から非正曲率空間への同変写像のエネルギーを定義し，最小のエネルギーをもつ同変写像の存在について述べる．次に，像空間がリーマン多様体である場合に，同変写像に対するボホナー型公式を書き下す．最後に，ある局所体上の代数群の格子の超剛性を，エネルギー最小写像を用いて証明する．

2 同変写像のエネルギー

特異点をもつ空間を定義域とする調和写像，エネルギー最小写像の研究としては

[2] G の離散部分群で，$\Gamma\backslash G$ の測度が有限なもの

[3] $K = \begin{cases} SO(n) & (p=\infty) \\ PGL(n,\mathbf{Z}_p) & (p \text{ が素数}) \end{cases}$

(i) Jost [4, 5] による, ある種の測度空間から非正曲率空間へのエネルギー最小写像の研究

(ii) Lebeau [9] による, 有限グラフの間のエネルギー最小写像の研究

(iii) 小谷-砂田 [8] による, グラフからリーマン多様体への調和写像の研究

がある.

本節では, 単体複体から非正曲率空間への同変写像のエネルギーを定義し, 像空間がリーマン多様体の場合にエネルギーの第 1 変分を計算する. まず, 非正曲率空間の定義を復習する.

定義 非正曲率空間 (NPC 空間, CAT(0) 空間ともよばれる) とは, 完備距離空間 (Y, d_Y) で次の二つの条件をみたすもののことをいう:

(i) (Y, d_Y) は長さのある空間である. すなわち, Y の任意の 2 点 p, q に対して, 距離 $d_Y(p,q)$ は p と q を結ぶ rectifiable な曲線の長さとして実現される. (そのような距離を実現する曲線のことを測地線とよぶ.)

(ii) Y の 3 点 p, q, r とそれらを 2 点ずつ結ぶ測地線 $\gamma_{p,q}$ (長さ c), $\gamma_{q,r}$ (長さ a) および $\gamma_{r,p}$ (長さ b) が任意に与えられたとき, 次の比較条件がみたされる: 任意の $0 < \lambda < 1$ に対して, $\gamma_{q,r}$ を $\lambda : 1-\lambda$ に内分する点を q_λ とする. すなわち,

$$d_Y(q_\lambda, q) = \lambda a, \quad d_Y(q_\lambda, r) = (1-\lambda)a$$

である. ユークリッド的三角形 $\bar{p}\bar{q}\bar{r}$ (退化しているかもしれない) を, 頂点 $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ の対辺の長さが a, b, c となるようにとると, その上に q_λ に対応する点 $\bar{q}_\lambda = \bar{q} + \lambda(\bar{r} - \bar{q})$ がある. このとき, q_λ から反対側の頂点 p への距離 $d_Y(p, q_\lambda)$ はユークリッド的距離 $|\bar{p} - \bar{q}_\lambda|$ によって上から押さえられる. この不等式は

$$d_Y(p, q_\lambda)^2 \leq (1-\lambda) d_Y(p,q)^2 + \lambda d_Y(p,r)^2 - \lambda(1-\lambda) d_Y(q,r)^2$$

と書き表される.

性質 (ii) から容易に導かれる帰結として, 非正曲率空間内の任意の 2 点を結ぶ測地線は一意的である. また, Y は可縮であることが知られている.

Σ を有限単体複体とし, X をその普遍被覆とする. X には Σ の基本群 $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$ が作用し, $\Sigma = \Gamma \backslash X$ である. 一般に, 単体複体 Υ の r 単体全体の集合を $\Upsilon(r)$ で表す. Γ の X

への作用は単体的であるから, Γ は $X(r)$ に作用する. この作用の Γ-軌道の代表元の集合を $\mathcal{F}(r)$ で表す.

Y を非正曲率空間とし, 表現 $\rho : \Gamma \to \mathrm{Isom}(Y)$ が与えられているとする. 写像 $f : X(0) \longrightarrow Y$ が **ρ-同変**であるとは, $f(\gamma x) = \rho(\gamma)f(x)$ $(x \in X(0), \gamma \in \Gamma)$ をみたすときをいう. 任意の ρ に対して ρ-同変写像が存在する. 実際, ρ-同変写像全体の集合は, $\mathcal{F}(0)$ の元の個数だけの Y のコピーの直積と自然に同一視される.

注意 Y は可縮であるから, 任意の写像 $f : X(0) \to Y$ は連続写像 $\overline{f} : X \to Y$ に拡張でき, f が ρ-同変ならば $\overline{f}$ も ρ-同変にとれる. 実際, $\overline{f}$ の標準的な構成法があり, それを記述するために次の事実を用いる (証明は [7, p.639, Lemma 2.5.1] を参照せよ).

$p_0, \cdots, p_r$ を Y の点とし, $t_0, \cdots, t_r$ を非負実数で $\sum_{i=0}^{r} t_i = 1$ をみたすものとする. このとき, 関数

$$F(q) = \sum_{i=0}^{r} t_i \, d_Y(p_i, q)^2$$

を最小にする点 $p \in Y$ が唯一つ存在する. この点 p を $\sum_{i=0}^{r} t_i p_i$ で表す.

さて, X の各単体 s (頂点を $x_0, \ldots, x_r$ とする) に対し, $\overline{f}$ の s への制限を

$$\sum_{i=0}^{r} t_i x_i \mapsto \sum_{i=0}^{r} t_i \, f(x_i) \quad (t_i \geq 0, \ \sum_{i=0}^{r} t_i = 1)$$

によって定義する. ここで, $\sum_{i=0}^{r} t_i x_i$ は $(t_0, \ldots, t_r)$ を重心座標とする s の点である. このようにして得られる $\overline{f} : X \to Y$ のことを f の**区分的アフィンな拡張**とよぶ. このとき, f が ρ-同変ならば $\overline{f}$ もそうなることは容易に確かめられる.

定義 ρ-同変写像 $f : X(0) \to Y$ の**エネルギー** $E(f)$ を以下のように定義する: 各 $e = \{x, y\} \in \mathcal{F}(1)$ に対して

$$|df(e)| = d_Y(f(x), f(y))$$

とおき,

$$E(f) = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{F}(1)} |df(e)|^2$$

とおく.

$$e(f)(x) = \frac{1}{2} \sum_{x \in e \in X(1)} |df(e)|^2 \quad (x \in X(0))$$

とおくと, $E(f)$ の定義式は

$$E(f) = \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{F}(0)} e(f)(x)$$

と書き換えられる. $e(f)(x)$ を f の x における**エネルギー密度**とよぶ.

以下, Y が非正曲率をもつ完備単連結なリーマン多様体の場合を考える. このとき, ρ-同変写像 $f: X(0) \to Y$ が**調和**であるとは, f が E の臨界点, すなわち f の任意の滑らかな変分 $\{f_t\}_{-\varepsilon<t<\varepsilon}$ ($f_t: X(0) \to Y$ は ρ-同変写像, $f_0 = f$) に対して $\frac{d}{dt}E(f_t)|_{t=0} = 0$ をみたすときをいう. $x \in X(0)$, $y \in (\mathrm{Lk}\, x)(0)$[4] に対し,

$$\overrightarrow{f(x)f(y)} = {\exp_{f(x)}}^{-1} f(y) \quad (\in T_{f(x)}Y)$$

とおく.

命題 1. Y は上述の通りとする. このとき, ρ-同変写像 $f: X(0) \longrightarrow Y$ が E の臨界点であるための必要十分条件は

$$\Delta f(x) \equiv \sum_{y \in (\mathrm{Lk}\, x)(0)} \overrightarrow{f(x)f(y)} = 0 \quad (x \in \mathcal{F}(0))$$

によって与えられる.

証明　変分 f_t が与えられたとし, $W_x = \frac{d}{dt}f_t(x)|_{t=0} \in T_{f(x)}Y$ $(x \in \mathcal{F}(0))$ とおく. 簡単な計算により

$$\frac{d}{dt}E(f_t)|_{t=0} = -\sum_{x \in \mathcal{F}(0)} \sum_{y \in (\mathrm{Lk}\, x)(0)} \langle \overrightarrow{f(x)f(y)}, W_x \rangle$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ は Y のリーマン計量) となり, これから命題の結論が得られる.　　(証明おわり)

3　エネルギー最小写像の存在

$\Sigma = \Gamma \backslash X$, Y は前節の通りとする.

定義　$\rho: \Gamma \to \mathrm{Isom}(Y)$ を準同型とする. ρ-同変写像 $f: X(0) \to Y$ が**エネルギー最小**であるとは, すべての ρ-同変写像 $g: X(0) \to Y$ に対して $E(f) \leq E(g)$ をみたすときをいう.

定義　Γ を有限生成群 (よって可算群) とし, その生成元 $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ を選んでおく. このとき, 準同型 $\rho: \Gamma \to \mathrm{Isom}(Y)$ が**固有**であるとは, 任意の $L > 0$ に対して

$$\left\{ p \in Y \mid \max_{i=1,\ldots,m} d_Y(\rho(\gamma_i)p, p) \leq L \right\}$$

が Y において有界であるときをいう.

ρ が**簡約的**であるとは, 次の条件のいずれかをみたすときをいう:

[4] $\mathrm{Lk}\, x$ は x のリンク (まつわり複体) を表す.

(i) Y の ρ-不変な閉凸集合 C が存在して, 準同型 $\gamma \in \Gamma \mapsto \rho(\gamma)|_C \in \mathrm{Isom}(C)$ は固有である;

(ii) Y の ρ-不変な閉凸集合 F で, $\mathbf{R}^k$ $(k \geq 0)$ に等長的なものが存在する.

定理 2. Σ を有限単体複体とし, X, Γ をそれぞれ Σ の普遍被覆, 基本群とする. Y を局所コンパクトな非正曲率空間とし, $\rho : \Gamma \to \mathrm{Isom}(Y)$ を準同型とする. このとき, ρ が簡約的ならば, 最小のエネルギーをもつ ρ-同変写像 $f : X(0) \to Y$ が存在する.

証明　$f_n : X(0) \to Y$ $(n = 1, 2, \dots)$ を ρ-同変写像の列で, $n \to \infty$ としたとき

$$E(f_n) \searrow \inf\{E(g) \mid g : X(0) \to Y \text{ は } \rho\text{-同変写像}\}$$

となるものとする.

まず, Y の ρ-不変な閉凸集合 C が存在して, 準同型 $\gamma \in \Gamma \mapsto \rho(\gamma)|_C \in \mathrm{Isom}(C)$ が固有である場合を考える. $\pi : Y \to C$ を, $p \in Y$ に対して p に最も近い C の点を対応させる写像とする. π は $\rho(\Gamma)$-同変で距離を減少させる写像であるから, f_n の代わりに $\pi \circ f_n$ を考えることにより, f_n の像が C に含まれると仮定してよい. $x_0 \in X(0)$ を固定する. f_n の ρ-同変性により,

$$d_C(\rho(\gamma_i)f_n(x_0), f_n(x_0)) = d_C(f_n(\gamma_i x_0), f_n(x_0)) \quad (i = 1, \dots, m)$$

であり, $\{E(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が有界で X が連結であるから, 右辺は n (および i) に無関係な定数によって上から押さえられる. 固有性の仮定により, $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ は有界であり, C が局所コンパクトであるから, $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する部分列をもつ. $d_C(f_n(x_0), f_n(x))$ が n に無関係な定数によって上から押さえられるから, $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ の有界性は, 各 $x \in X(0)$ に対して $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ の有界性を導くことに注意する. 対角線論法により, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列で, $f_\infty : X(0) \to C$ に各点収束するものが見つかる. f_∞ は明らかに ρ-同変であり, エネルギーの下限を実現することも容易に確かめられる.

次に, Y の ρ-不変な閉凸集合 F で, $\mathbf{R}^k$ に等長的なものが存在する場合を扱う. 再び f_n の像が F に含まれると仮定してよい. F を $\mathbf{R}^k$ と同一視する.

$$V = \{v \in \mathbf{R}^k \mid \tau_v \circ \rho(\gamma) = \rho(\gamma) \circ \tau_v \ ({}^\forall \gamma \in \Gamma)\}$$

(τ_v は v に対応する平行移動を表す) と定義し, $V^\perp$ を V の直交補空間とする. $x_0 \in X(0)$ を固定する. 各 n に対して, $u_n \in V$ を $f_n(x_0) + u_n$ $(=: z_n) \in V^\perp$ となるように選び, $g_n = f_n + u_n$ とおく. g_n は ρ-同変で f_n と同じエネルギーをもつことに注意する. $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$

が有界でなければ, ある $z_\infty \in V^\perp(\infty)$ に収束する部分列をもつ. $v \in V^\perp$ を z_∞ に対応するベクトルとする. 各 $\gamma \in \Gamma$ に対して

$$d_{\mathbf{R}^k}(\rho(\gamma)f_n(x_0), f_n(x_0)) = d_{\mathbf{R}^k}(f_n(\gamma x_0), f_n(x_0))$$

であり, 右辺は n に無関係な定数によって上から押さえられる. 一方, 左辺は

$$d_{\mathbf{R}^k}(\rho(\gamma)f_n(x_0) + u_n, f_n(x_0) + u_n) = d_{\mathbf{R}^k}(\rho(\gamma)z_n, z_n)$$

に等しい. よって, $\rho(\gamma)z_\infty = z_\infty$ が従い, これは $\tau_v \circ \rho(\gamma) = \rho(\gamma) \circ \tau_v$ を意味する. γ は任意であるから, $v \in V$ でなければならず矛盾を生じる. よって, $\{z_n = g_n(x_0)\}_{n=1}^\infty$ は有界であり, 上と同様にして $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ がエネルギー最小な ρ-同変写像に収束する部分列をもつことが結論できる. (証明おわり)

注意 $f_n : X(0) \to Y$ $(n = 1, 2, \dots)$ を ρ-同変写像のエネルギー最小化列とし, f_n がエネルギー最小写像 $f_\infty : X(0) \to Y$ に収束するとする. $\overline{f_n}$, $\overline{f_\infty} : X \to Y$ をそれぞれ f_n, f_∞ の区分的アフィンな拡張とする. このとき, $\{\overline{f_n}\}_{n=1}^\infty$ の部分列で, X の各コンパクト集合上一様に $\overline{f_\infty}$ に収束するものが見つかる. これは次のようにして分かる. $s \subset X$ を単体とし, $x_0, \dots, x_r$ をその頂点とする. すると, 各 n に対して $\overline{f_n}|_s$ はリプシッツ連続であり, そのリプシッツ定数は

$$c(r) \max_{0 \le i < j \le r} d_Y(\overline{f_n}(x_i), \overline{f_n}(x_j))$$

によって上から押さえられる (c.f. [7, Proposition 2.5.2]). $\{E(f_n)\}_{n=1}^\infty$ は有界であるから, $\{\overline{f_n}\}_{n=1}^\infty$ は局所的に一様リプシッツ連続であることが従う. 一方, ある $x \in X$ に対して (実際, すべての $x \in X(0)$ に対して) $\{\overline{f_n}(x)\}_{n=1}^\infty$ は有界であることが分かっている. よって, $\{\overline{f_n}\}_{n=1}^\infty$ は局所的に一様有界でもある. アスコリ・アルツェラの定理により, $\{\overline{f_n}\}_{n=1}^\infty$ の部分列で, ある $\phi_\infty : X \to Y$ に X の各コンパクト集合上一様に収束するものが存在する. ϕ_∞ は区分的アフィン写像であることが容易に確かめられる. $\phi_\infty|_{X(0)} = f_\infty$ であるから, $\phi_\infty = \overline{f_\infty}$ と結論できる.

4 ボホナー型公式

本節を通じて, Y は非正曲率をもつ完備単連結なリーマン多様体とする. $\Sigma = \Gamma \backslash X$ は前節までのとおりとし, $\rho : \Gamma \to \mathrm{Isom}(Y)$ を準同型とする. 本節では, ρ-同変写像 $f : X(0) \to Y$ に対するボホナー型公式を書き下す.

定理 3. X が次の条件をみたすとする:

任意の $x \in X(0)$ と $y, z \in (\mathrm{Lk}\, x)(0)$ について, $\{y,z\} \in X(1)$ ならば $\{y,z\} \in (\mathrm{Lk}\, x)(1)$ である.

このとき, ρ-同変写像 $f : X(0) \to Y$ に対して, 次の公式が成り立つ:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x \in \mathcal{F}(0)} |\Delta f(x)|^2 \\
&\quad = \sum_{x \in \mathcal{F}(0)} \Bigg[\sum_{y \in (\mathrm{Lk}\, x)(0)} \frac{N_2(x,y)}{2} \left| \overrightarrow{f(x)f(y)} \right|^2 \\
&\qquad + \sum_{y \in (\mathrm{Lk}\, x)(0)} \sum_{y' \in (\mathrm{Lk}\, x)(0) \setminus (\mathrm{Lk}\, y)(0)} \left\langle \overrightarrow{f(x)f(y)}, \overrightarrow{f(x)f(y')} \right\rangle \\
&\qquad + \frac{1}{2} \sum_{y \in (\mathrm{Lk}\, x)(0)} \sum_{y' \in (\mathrm{Lk}\, x)(0) \cap (\mathrm{Lk}\, y)(0)} \left(\left| \overrightarrow{f(y)f(y')} \right|^2 - \left| \overrightarrow{f(x)f(y)} - \overrightarrow{f(x)f(y')} \right|^2 \right) \Bigg] \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
N_2(x,y) &= \#\{s \in X(2) \mid \{x,y\} \subset s\} \\
&= \#\{e \in (\mathrm{Lk}\, x)(1) \mid y \in e\}
\end{aligned}
$$

である.

証明

$$
|\Delta f(x)|^2 = \sum_{y \in (\mathrm{Lk}\, x)(0)} \left[\left| \overrightarrow{f(x)f(y)} \right|^2 + \sum_{y' \in (\mathrm{Lk}\, x)(0), y' \neq y} \left\langle \overrightarrow{f(x)f(y)}, \overrightarrow{f(x)f(y')} \right\rangle \right]
$$

を用いて,

$$
\begin{aligned}
&|\Delta f(x)|^2 - ((1) \text{ の右辺 } [\ \ ] \text{ 内の第 1 項} + \text{第 2 項}) \\
&= \sum_{y \in (\mathrm{Lk}\, x)(0)} \left[-\frac{N_2(x,y)}{2} \left| \overrightarrow{f(x)f(y)} \right|^2 + \sum_{y' \in (\mathrm{Lk}\, x)(0) \cap (\mathrm{Lk}\, y)(0)} \left\langle \overrightarrow{f(x)f(y)}, \overrightarrow{f(x)f(y')} \right\rangle \right]
\end{aligned}
$$

を得る. 一方, (1) の右辺 [ ] 内の第 3 項は,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{y \in (\mathrm{Lk}\, x)(0)} \sum_{y' \in (\mathrm{Lk}\, x)(0) \cap (\mathrm{Lk}\, y)(0)} \Bigg[\frac{1}{2} \left(\left| \overrightarrow{f(y)f(y')} \right|^2 - \left| \overrightarrow{f(x)f(y)} \right|^2 - \left| \overrightarrow{f(x)f(y')} \right|^2 \right) \\
&\quad + \left\langle \overrightarrow{f(x)f(y)}, \overrightarrow{f(x)f(y')} \right\rangle \Bigg]
\end{aligned}
$$

である．ゆえに，

$$\sum_{x\in\mathcal{F}(0)}\sum_{y\in(\mathrm{Lk}\,x)(0)}\sum_{y'\in(\mathrm{Lk}\,x)(0)\cap(\mathrm{Lk}\,y)(0)}\left(\left|\overrightarrow{f(y)f(y')}\right|^2-\left|\overrightarrow{f(x)f(y)}\right|^2-\left|\overrightarrow{f(x)f(y')}\right|^2\right)$$
$$=-\sum_{x\in\mathcal{F}(0)}\sum_{y\in(\mathrm{Lk}\,x)(0)}N_2(x,y)\left|\overrightarrow{f(x)f(y)}\right|^2 \tag{2}$$

を示せばよい．

$\overrightarrow{X}(r)$ で頂点に順序をつけた r 単体の集合とする．$\overrightarrow{X}(r)$ の元は記号 $(x_0,\ldots,x_r)$ で表す．Γ は $\overrightarrow{X}(r)$ にも作用する．例えば，X に関する我々の仮定の下で

$$\overrightarrow{\mathcal{F}}(2)=\{(x,y,y')\mid x\in\mathcal{F}(0),\ y\in(\mathrm{Lk}\,x)(0),\ y'\in(\mathrm{Lk}\,x)(0)\cap(\mathrm{Lk}\,y)(0)\}$$

は，$\overrightarrow{X}(2)$ の Γ-軌道の代表元の集合になっている．このことに注意すると，(2) の左辺は

$$\sum_{x\in\mathcal{F}(0)}\sum_{y\in(\mathrm{Lk}\,x)(0)}\sum_{y'\in(\mathrm{Lk}\,x)(0)\cap(\mathrm{Lk}\,y)(0)}\left(\left|\overrightarrow{f(y)f(y')}\right|^2-\left|\overrightarrow{f(x)f(y)}\right|^2-\left|\overrightarrow{f(x)f(y')}\right|^2\right)$$
$$=\sum_{(x,y,y')\in\overrightarrow{\mathcal{F}}(2)}\left(\left|\overrightarrow{f(y)f(y')}\right|^2-\left|\overrightarrow{f(x)f(y)}\right|^2-\left|\overrightarrow{f(x)f(y')}\right|^2\right)$$
$$=\sum_{(y,y',x)\in\overrightarrow{\mathcal{F}''}(2)}\left|\overrightarrow{f(y)f(y')}\right|^2-\sum_{(x,y,y')\in\overrightarrow{\mathcal{F}}(2)}\left|\overrightarrow{f(x)f(y)}\right|^2-\sum_{(x,y',y)\in\overrightarrow{\mathcal{F}'}(2)}\left|\overrightarrow{f(x)f(y')}\right|^2$$

と書き直すことができる．ここで，

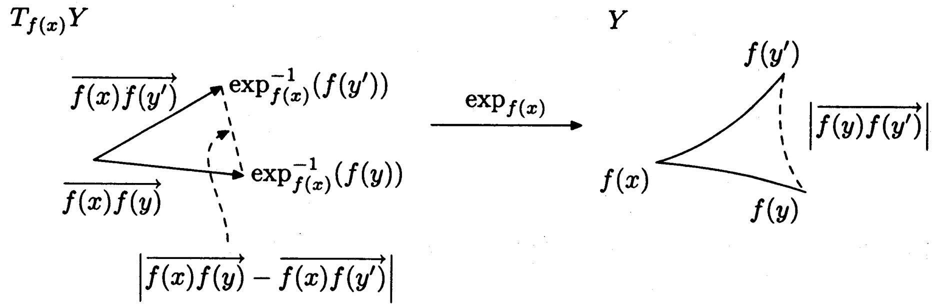
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathcal{F}'}(2)&=\{(x,y',y)\mid(x,y,y')\in\overrightarrow{\mathcal{F}}(2)\}\\ \overrightarrow{\mathcal{F}''}(2)&=\{(y,y',x)\mid(x,y,y')\in\overrightarrow{\mathcal{F}}(2)\}\end{aligned}$$

である．$\overrightarrow{\mathcal{F}'}(2)$, $\overrightarrow{\mathcal{F}''}(2)$ もまた $\overrightarrow{X}(2)$ の Γ-軌道の代表元の集合になっていること，f が ρ-同変写像であることから，上の式の最後の辺に現れる三つの和は等しい．したがって

$$\sum_{x\in\mathcal{F}(0)}\sum_{y\in(\mathrm{Lk}\,x)(0)}\sum_{y'\in(\mathrm{Lk}\,x)(0)\cap(\mathrm{Lk}\,y)(0)}\left(\left|\overrightarrow{f(y)f(y')}\right|^2-\left|\overrightarrow{f(x)f(y)}\right|^2-\left|\overrightarrow{f(x)f(y')}\right|^2\right)$$
$$=-\sum_{(x,y,y')\in\overrightarrow{\mathcal{F}}(2)}\left|\overrightarrow{f(x)f(y)}\right|^2=-\sum_{x\in\mathcal{F}(0)}\sum_{y\in(\mathrm{Lk}\,x)(0)}\sum_{y'\in(\mathrm{Lk}\,x)(0)\cap(\mathrm{Lk}\,y)(0)}\left|\overrightarrow{f(x)f(y)}\right|^2$$
$$=-\sum_{x\in\mathcal{F}(0)}\sum_{y\in(\mathrm{Lk}\,x)(0)}N_2(x,y)\left|\overrightarrow{f(x)f(y)}\right|^2$$

を得る．これで (2) が示された． (証明おわり)

注意　(1) の右辺 [　] 内の第 3 項に現れる $\left|\overrightarrow{f(x)f(y)} - \overrightarrow{f(x)f(y')}\right|$ は $T_{f(x)}Y$ における $\exp_{f(x)}^{-1}(f(y))$ と $\exp_{f(x)}^{-1}(f(y'))$ の間の距離である. Y が非正曲率をもつことにより, これは Y における $f(y)$ と $f(y')$ の間の距離 $\left|\overrightarrow{f(y)f(y')}\right|$ 以下になる. したがって, (1) の右辺 [　] 内の第 3 項は非負である.



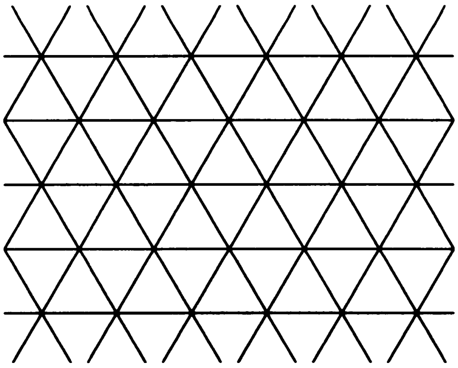
5　剛性への応用

本節でも Y は非正曲率をもつ完備単連結なリーマン多様体とし, 第 3 節で存在が保証された調和写像を用いて, ある局所体上の代数群のココンパクト格子の超剛性が証明できることをみる.

以下

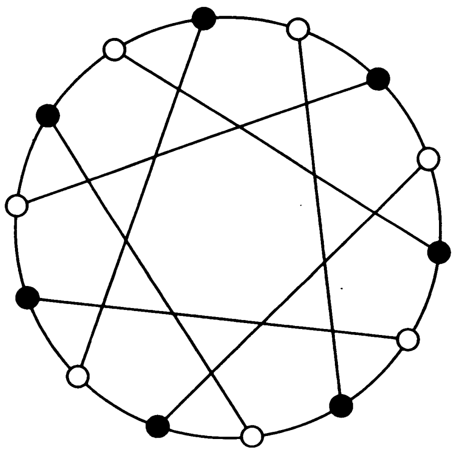
$$G = PGL(3, \mathbf{Q}_p), \quad X = PGL(3, \mathbf{Q}_p)/PGL(3, \mathbf{Z}_p)$$

とおく. ここで $\mathbf{Z}_p$ は p 進整数環である. X は 2 次元ユークリッド的ビルディングの構造をもつ. ここで, ビルディングとは, ある性質をもつ部分複体 (アパートメントとよばれる) の族が指定された単体複体で, 各アパートメントはコクセター複体 (コクセター群から自然に定まる単体複体) に同型であることが要請される. 我々の X の場合, コクセター複体は下図のものであり, 対応するコクセター群は, 図の直線に関する鏡映によって生成されるユークリッド的鏡映群 ($\widetilde{A_2}$ 型とよばれるもの) である.



Type $\widetilde{A_2}$

$p=2$ の場合, X の各頂点のリンクは次のようなグラフである:



Γ を G のココンパクト格子で, X に非常に自由に[5] 作用するものとする. このとき商空間 $\Gamma\backslash X$ は単体複体となる.

定理 4. Γ を上のとおりとし, Y を非正曲率をもつ完備単連結なリーマン多様体 (例えば, 非コンパクト型の対称空間) とする. このとき, 準同型 $\rho:\Gamma\to \mathrm{Isom}(Y)$ が簡約的ならば, $\rho(\Gamma)$ は Y の 1 点を固定する.

証明　定理 2 により, 調和な ρ-同変写像 $f: X(0)\to Y$ が存在する. この f に定理 3 を

[5] Γ の X への作用が非常に自由であるとは, 任意の $\gamma\in\Gamma$ $(\gamma\neq e)$ と $x\in X(0)$ に対して $\gamma(\mathrm{St}\,x)\cap\mathrm{St}\,x=\emptyset$ が成り立つときをいう. ここで, $\mathrm{St}\,x$ は x の星状複体を表す.

適用する. f は調和なので (1) の左辺は 0 である. (1) の右辺 [ ] 内の第 3 項は, 定理 3 の後の注意で述べたように非負になることに注意する. (1) の右辺 [ ] 内の第 1 項 + 第 2 項は

$$\left(\overrightarrow{f(x)f(y)}\right)_{y\in(\mathrm{Lk}\,x)(0)} \in \mathrm{Map}((\mathrm{Lk}\,x)(0), T_{f(x)}Y)$$

の 2 次形式である.

主張 これは正定値である.

主張から, f が定値写像でないとすると (1) の右辺は正となり矛盾. よって, f は定値写像であり, 定理の結論を得る. (証明おわり)

証明中の主張は知られている事実だが説明しておこう. $T_{f(x)}Y = \mathbf{R}$ として確かめれば十分である. このとき, $N := \#(\mathrm{Lk}\,x)(0) = 2(p^2+p+1)$, $m := N_2(x,y) = p+1$ とおくと, 上の 2 次形式に対応する行列 (N 次対称行列) は $B = \frac{m}{2}I + J - A$ と書ける. ここで, I は単位行列, J はすべての成分が 1 の行列, A は $\mathrm{Lk}\,x$ の隣接行列である. $\mathbf{v}_0 = {}^t(1,1,\ldots,1)$ は $J\mathbf{v}_0 = N\mathbf{v}_0$, $A\mathbf{v}_0 = m\mathbf{v}_0$ をみたす. とくに, m は A の最大固有値で, 重複度は 1 である. また, ${\mathbf{v}_0}^{\perp}$ 上 $J = 0$ であり, このことから B の最小固有値は $\frac{m}{2} - \lambda_1$ (λ_1 は A の m の次に大きな固有値) であることが分かる. ところが, $\lambda_1 = \sqrt{m-1}$ (Feit-Higman [2]) であり, よって $\frac{m}{2} - \lambda_1 > 0$ となる.

当面の課題は, Γ の X への作用が非常に自由であるという仮定をおとすことである. 実際, 本稿の定式化は, 作用が自由でない場合にまで一般化できると期待している.

参考文献

[1] K. Corlette, *Archimedian superrigidity and hyperbolic geometry*, Ann. Math. **135** (1992), 165–182.

[2] W. Feit and G. Higman, *The nonexistence of certain generalized polygons*, J. Algebra **1** (1964), 114–131.

[3] M. Gromov and R. Schoen, *Harmonic maps into singular spaces and p-adic superrigidity for lattices in groups of rank one*, Publ. Math. IHES **76** (1992), 165–246.

[4] J. Jost, *Equilibrum maps between metric spaces*, Calc. Var. **2** (1997), 173–204.

[5] J. Jost, *Convex functionals and generalized harmonic maps into spaces of nonpositive curvature*, Comment. Math. Helv. **70** (1995), 659–673.

[6] J. Jost and S.-T. Yau, *Harmonic maps and superrigidity*, Differential geometry: partial differential equations on manifolds, Proc. Symp. Pure Math. **54-I** (1993), 245–280.

[7] M. Korevaar and R. Schoen, *Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets*, Comm. Anal. Geom. **1** (1993), 561–659.

[8] M. Kotani and T. Sunada, Standard realizations of crystal lattices via harmonic maps, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2000), 1–20.

[9] É. Lebeau, *Applications harmoniques entre graphes finis et un théorème de superrigidité*, Ann. Inst. Fourier **46** (1996), 1183–1203.

[10] N. Mok, Y.-T. Siu and S.-K. Yeung, *Geometric superrigidity*, Invent. Math. **113** (1993), 57–83.

[11] Y.-T. Siu, *The complex-analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds*, Ann. Math. **112** (1980), 73–111.